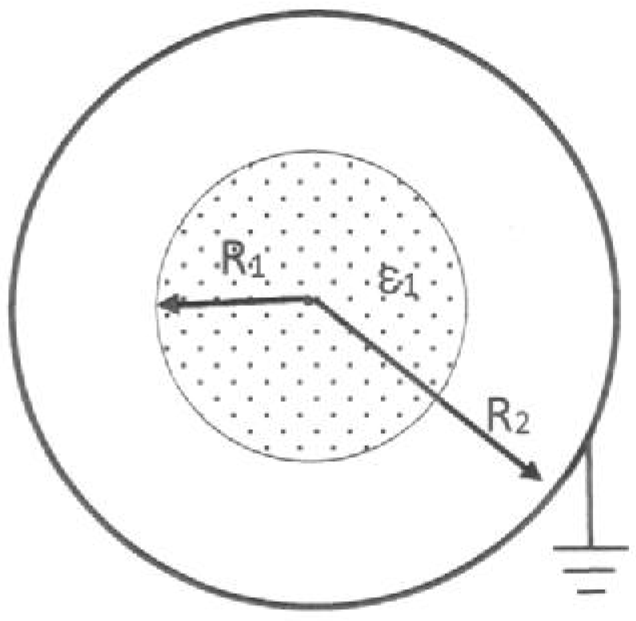
Prova scritta di Fisica 2 13.1.2017

Esercizio n.1 **[10 punti]**



Si consideri un sistema composto da una sfera isolante di costante dielettrica relativa ε_1, di raggio R_1, in cui è depositata una densità di carica uniforme ρ_1. Intorno a questa sfera è posta una sottile superficie sferica metallica di raggio $R_2 = 2\,R_1$, concentrica alla prima sfera. L'esterno della superficie metallica è posto a potenziale zero.
Si calcolino inoltre le espressioni del campo elettrico e del potenziale in tutto lo spazio, facendo un grafico qualitativo di E(r) e di V(r), e calcolandone il valore numerico in $r = R_1$

Dati: $R_1 = \sqrt{2}$ **cm** ; $\varepsilon_1 = 2$; $\rho_1 = \sqrt{2}$ **μC/m³**

Soluzione

La carica totale nella sfera interna sarà $Q_1^T = \frac{4}{3}\pi R_1^3 \rho_1$

$R_1 < r < R_2$ il campo è quello generato da Q_1^T

$$\therefore\ E_2(r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q_1^T}{r^2} \qquad V_2(r) = \frac{Q_1^T}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r} + C_2 \qquad \left[\frac{Q_1^T}{4\pi\varepsilon_0} = \frac{R_1^3\rho_1}{3\varepsilon_0}\right]$$

dovendo essere $V(R_2) = 0$ $\quad V(R_2) = \frac{Q_1^T}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{R_2} + C_2 = 0$

$$\Rightarrow C_2 = -\frac{Q_1^T}{4\pi\varepsilon_0 R_2} \qquad V_2(r) = \frac{Q_1^T}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{R_2}\right) \therefore$$

$r \geq R_2$ $\quad E(r) = 0$ [sulla superficie interna di raggio R_2 appare una carica indotta $-Q_1^T$, quindi dall'esterno $Q_2 = 0$]
e $V(r) = 0$

$0 \leq r < R_1$ All'interno di una sfera di raggio r la carica è $Q_1(r) = \frac{4}{3}\pi r^3 \rho_1$

Utilizzando il teorema di Gauss $\phi(D)_r = Q_1(r)$

$$D_1(r)\cdot \cancel{4\pi r^2} = Q_1(r) = \frac{\cancel{4}}{3}\cancel{\pi} r^{\cancel{3}}\rho_1$$

$$D_1(r) = \frac{1}{3}r\rho_1 \qquad E_1(r) = \frac{1}{\varepsilon_0\varepsilon_1}\frac{r}{3}\rho_1 = \frac{Q_1^T}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_1}\frac{r}{R_1^3} \therefore$$

$$V_1(r) = -\int_0^r E(r)\,dr = \frac{Q_1^T}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_1}\frac{r^2}{2R_1^3} + C_1$$

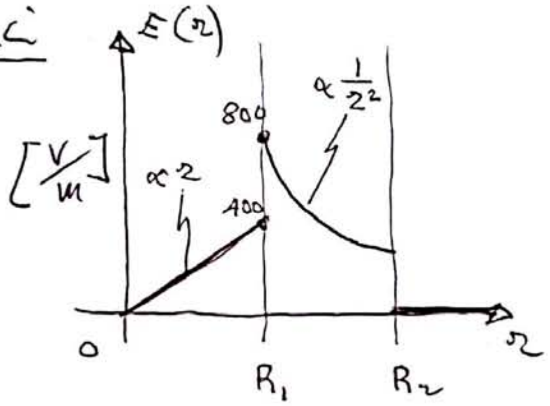
$$C_1 : \; V_1(R_1)_{r \leq R_1} = V_2(R_1)_{r \geq R_1}$$

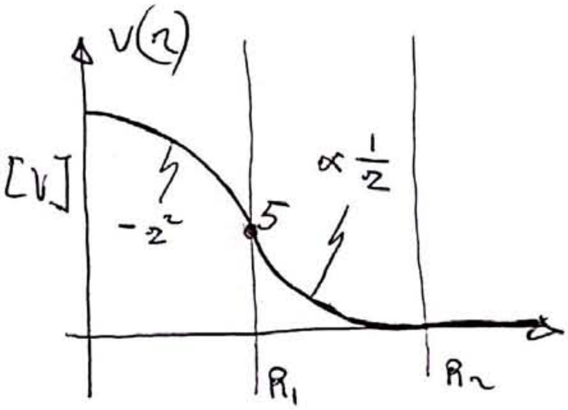
$$-\frac{Q_1^T}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_1}\frac{1}{2R_1} + C_1 = \frac{Q_1^T}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{R_1}-\frac{1}{R_2}\right) \overset{R_2 = 2R_1}{=} \frac{Q_1^T}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{2R_1}$$

$$\Rightarrow C_1 = \frac{Q_1^T}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{2R_1}\left[1+\frac{1}{\varepsilon_1}\right] = \frac{Q_1^T}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{2R_1}\frac{1+\varepsilon_1}{\varepsilon_1}$$

$$\Rightarrow V_1(r) = \frac{Q_1^T}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{2R_1}\left[-\frac{r^2}{R_1^2\varepsilon_1}+\frac{1+\varepsilon_1}{\varepsilon_1}\right] = \frac{R_1^2\rho_1}{6\varepsilon_0}\left[-\frac{r^2}{R_1^2\varepsilon_1}+\frac{1+\varepsilon_1}{\varepsilon_1}\right] \therefore$$

Grafici





Calcoli

$$V_2(R_1) = \frac{Q_1^T}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{R_1}-\frac{1}{2R_1}\right) = \frac{Q_1^T}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{2R_1} = \frac{R_1^2\rho_1}{6\varepsilon_0} = V_1(R_1)$$

$$= \frac{2\cdot 10^{-4}\cdot\sqrt{2}\cdot 10^{-6}}{6\cdot 9\cdot 10^{-12}} = \frac{\sqrt{2}}{27}10^2 \sim 5\,V$$

$$\mathcal{E}_1(R_1^-) = \frac{1}{\varepsilon_0\varepsilon_1}\frac{R_1}{3}\rho_1 = \frac{\cancel{\sqrt{2}}\cdot 10^{-2}\cdot\cancel{\sqrt{2}}\cdot 10^{-6}}{9\cdot 10^{-12}\cdot\cancel{6}\,3} = \frac{10^4}{27} \sim 400\ V/m$$

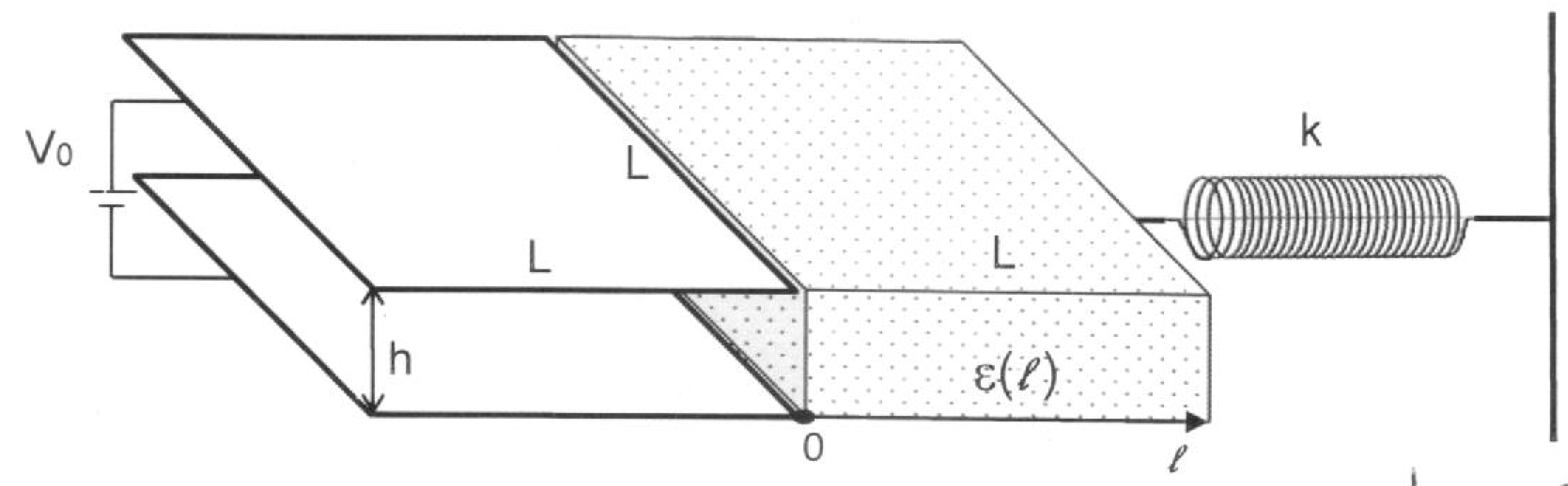
$$\mathcal{E}_2(R_1^+) = \frac{R_1\rho_1}{3\varepsilon_0} = \varepsilon_1\,\mathcal{E}_1(R_1^-) = 2\,\mathcal{E}_1(R_1^-) = 800\ V/m$$

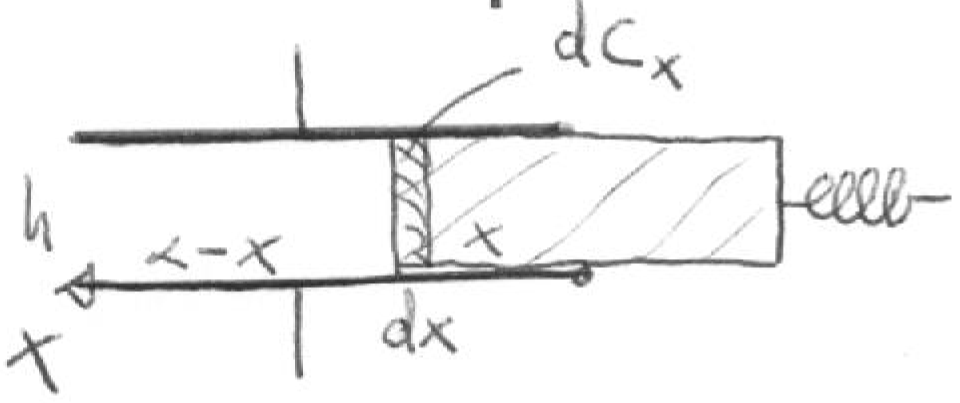
Prova scritta di Fisica 2 13.1.2017

Esercizio n.2 **[10 punti]**

Si consideri un condensatore piano ideale di superficie quadrata **LxL** e distanza fra le armature **h**, posto nel vuoto. Accanto ad esso è posta una lastra di materiale dielettrico delle stesse dimensioni della cavità del condensatore, collegata ad una molla ideale di costante elastica **k**. La molla è in condizione di allungamento nullo quando la lastra è appena al di fuori del condensatore, vedi figura. Se il condensatore viene alimentato con un generatore di tensione continua V_0 la lastra viene attratta all'interno del condensatore. Si calcoli il valore della costante k per cui l'estremo della lastra si trova in posizione di equilibrio stabile dentro il condensatore nel punto L/2. La lastra è composta da un materiale dielettrico la cui costante dielettrica relativa varia linearmente secondo la formula $\varepsilon_r(l) = 1 + \alpha\sqrt{l}$, dove ℓ rappresenta la coordinata all'interno della sbarra, partendo dall'estremo sinistro della lastra [$0 < \ell < L$].

Dati: **L = 8 cm ; h = 0,5 cm ; $V_0 = 10^3$ V ;** α **= 30 m$^{-1/2}$**





Soluzione

Quando la lastra è entrata di un tratto x la capacità del condensatore è la somma delle due capacità, nel vuoto e con il dielettrico

$C = C_{L-x} + C_x \qquad C_{L-x} = \dfrac{\varepsilon_0 L(L-x)}{h}$ $\qquad C_x$ dipende da ε

$dC_x = \dfrac{\varepsilon_0 L}{h}\varepsilon_r(x)\,dx \qquad C_c = \dfrac{\varepsilon_0 L}{h}\displaystyle\int_0^x (1+\alpha\sqrt{x})\,dx = \dfrac{\varepsilon_0 L}{h}\left[x + \dfrac{2}{3}\alpha x^{3/2}\right]$

$\Rightarrow C = \dfrac{\varepsilon_0 L}{h}\left[L + \dfrac{2}{3}\alpha x^{3/2}\right]$

$F_x = +\dfrac{\partial U_c}{\partial x} = \dfrac{1}{2}V_0^2\dfrac{\varepsilon_0 L}{h}\alpha\sqrt{x}\,\hat{x}$ all'equilibrio $\bar{F}_x + \bar{F}_k = 0 \qquad \bar{F}_k = -k\bar{x}$

quindi $\dfrac{1}{2}V_0^2\dfrac{\varepsilon_0 L}{h}\alpha\sqrt{x} = kx \qquad k = \dfrac{V_0^2\varepsilon_0 L\alpha}{2h\sqrt{x}}$ nel punto $x = \dfrac{L}{2}$:

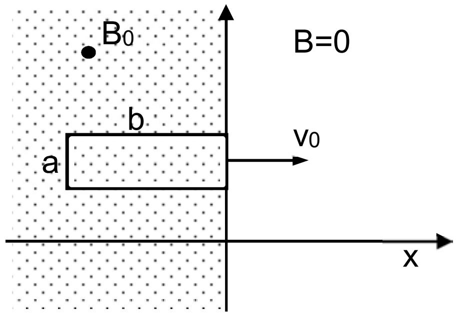
$k = \dfrac{V_0^2\varepsilon_0\alpha}{h}\sqrt{\dfrac{L}{2}} = \dfrac{10^6\cdot 9\cdot 10^{-12}\cdot 3\cdot\cancel{10^{1}}\ 2\cdot\cancel{10^{-1}}}{5\cdot 10^{-3}} = \dfrac{54}{5}10^{-3} \simeq 11\cdot 10^{-3}\ N/m$

$= 1{,}1\cdot 10^{-2}\ N/m$

Esercizio n.3 **[10 punti]**

Consideriamo una bobina rettanglare di lati ***a*** e **b** e resistenza elettrica ***R*** inizialmente posta in una regione di spazio in cui è presente un campo ***B₀*** costante ed uniforme perpendicolare al piano della bobina. La bobina viene poi estratta portandola tutta in una regione in cui ***B=0***, spostandola con velocità costante ***v₀***. Si calcoli il lavoro necessario per compiere questa operazione e l'energia dissipata per effetto Joule nella bobina. Si trascuri l'induttanza della bobina.

Dati: $a = 2$ cm , $b = 2a$; $B_0 = 5$ T ; $R = 40$ mΩ ; $v_0 = 3$ m/s .



Soluzione

Quando si estrae la spira, uscendo dalla zona in cui il campo magnetico è diverso da zero, il flusso di ***B*** concatenato alla spira varierà, inducendo una f.e.m. e quindi una corrente ***i***. Questa corrente, interagendo con il campo magnetico, genera una forza di verso opposto alla velocità che deve essere controbilanciata da una forza uguale e contraria, dovendo essere uguale a zero la risultante delle forze applicate.

Calcolo della corrente indotta:

$$i = \frac{f}{R} \quad ; \quad f = -\frac{d\phi(B,x)}{dt} \quad ; \quad \text{dove:}$$

$$\phi(B,x) = [\text{flusso di B quando la spira è uscita di un tratto x dalla zona in cui } B \neq 0] = B_0 \cdot a \cdot (b - x)$$

quindi: $$f = -\frac{d\left[B_0 a(b-x)\right]}{dt} = B_0 a \cdot v_0 \qquad \text{e} \qquad i = \frac{B_0 a \cdot v_0}{R}$$

Il verso della corrente indotta sarà tale da opporsi alla variazione di flusso, dato che il flusso diminuisce il verso sarà tale da farlo aumentare, quindi antiorario, in modo da generare un campo indotto concorde con B_0.

La spira sarà soggetta, per ogni lato L, ad una forza $\overline{F} = i \cdot \overline{L} \times \overline{B}$

Le forze sui due lati paralleli alla velocità sono uguali e contrarie, quindi si annullano, rimane la forza che si esercita sul lato **a** che si trova all'interno della zona in cui c'è il campo B_0.

$$\overline{F}(a) = -iaB_0\,\hat{x} = -\frac{B_0 a v_0}{R} \cdot a \cdot B_0\,\hat{x} = -\frac{B_0^2\,a^2 v_0}{R}\,\hat{x}$$

Il lavoro fatto per estrarre tutta la spira, applicando la forza costante $\overline{F} = -\overline{F}(a)$ sarà:

$$L = \int_0^b \overline{F} \cdot d\overline{x} = F \cdot b = \frac{B_0^2\,a^2 \cdot 2a \cdot v_0}{R} = \frac{2B_0^2\,a^3 \cdot v_0}{R} = \frac{2 \cdot 25 \cdot 8 \cdot 10^{-6} \cdot 3}{40 \cdot 10^{-3}} = 0{,}03 \quad J$$

L'energia dissipata per effetto Joule sarà uguale alla potenza dissipata per il tempo t* necessario ad estrarre tutta la bobina:

$$W = Ri^2 = \frac{f^2}{R} = \frac{B_0^2\,a^2\,{v_0}^2}{R} \qquad ; \qquad L = W \cdot t^* = \frac{B_0^2\,a^2\,{v_0}^2}{R} \cdot \frac{b}{v_0} = \frac{2\,B_0^2\,a^3\,v_0}{R}$$

che, come previsto, deve essere uguale al lavoro fatto per estrarre tutta la bobina.